Model: Gerçek sistemin temsili. Sadece mevcut sistemleri değil, mevcut olmayan sistemler için de geliştirilir. Mevcut sisi incelgoyor, modelin amacı, sistemin performansını geliştirmek çabası ile sisin davranını analiz etmektir. Mev. olmayan sisi inceleyorsa, modelin amacı sisin bileşenleri arasında fonksiyonel ilişkileri içeren sistemin ideal yapısını.

Model karar vericiye yardımcı. Kararda elde edilecek sonuçları daha iyi göstermesini sağlar. Herhangi bir duruma ilişkin ana model kurulunca, değişkenlerdeki değişiklikleri hızlı bir şekilde gösterebilmek mümkündür. Modelin karar vericiye sağladığı en önemli yararlardan en önemlisi; Model problemin anlaşılmasını kolaylaştırır. değişkenler arasındaki ilişkilerin nasıl olduğunu ortaya koyar ve dolayısıyla alınan kararların daha sağlıklı olmasını sağlar.

Modellerin Sınıflandırılması.

1- Temsil ettikleri biçime göre

a- İkonik Modeller: fiziki bir büyüklüğün belirli bir ölçekte temsili. Fabrika maketi

b- Analog modeller: Gerçek büyüklükler, hesap ve ölçme işlemi yapılması daha kolay diğer büyüklükler kümesi ile temsil eden modellerdir. Haritalar ve grafikler.

c- Sembolik modeller: Algılanan farkı, kullanılan semboller ile temsil edilenler arasında renk, boyut ve benzeri özellikler açısından bir bağlantı olmayabilir.

2- Kullanım amaçlarına göre:

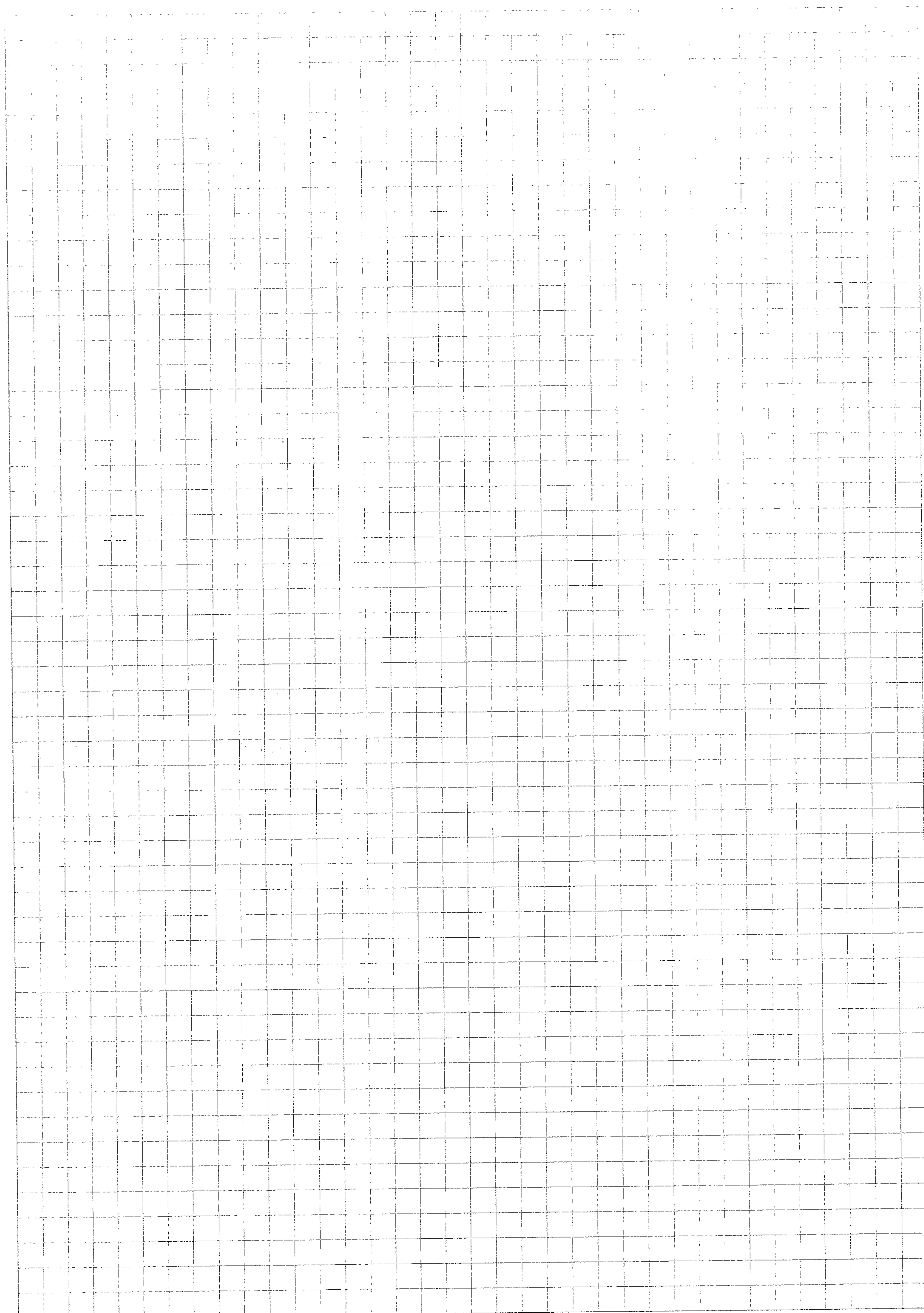
a- Sonuçlandırıcı (perscriptive): Sadece sonucu belirler. Optimizasyon modelleri gibi.

b- Açıklayıcı (descriptive): Sonuç verenler çok, gerçek dünyayı benzetme amaç.

3- Çözüm tekniklerine göre

a- Analitik Model: Bilinmeyeni (hesaplanacak miktar) bilinenler cinsinden yazılarak, cebirsel ilişkiler çözümlenirse, bu analitik yön.

b- Sayısal Model: Bazı durumlarda analitik yön. uygulanamaz, denklemler matematiksel olarak çok karmaşık olduğundan çözüm mümkün değildir. Bu durumlarda özel değerler denklemde yerine konur. Bilgisayar destekli modeller ortaya sonuç, sayısal modellere dayalı tekn.



Model geliştirme Süreci:

Matematik modeller, bir olayın geçmişte ve şimdiki zamanda elde edilmiş sonuçlarından yararlanarak bu olayın gelecekte ne gibi sonuçlar doğuracağını veya birden fazla olay varsa, bu olayların geçmişteki sonuçlarını analiz edip, onlar arasındaki ilişkiler kurarak karşılıklı etkileşimlerinin ilerdeki oluşumunda, ne şekilde etki yapacağını araştırmaya yardımcı olan tertibat tekniklerdir.

- Mat. mod. zamanda tasarruf sağlar.
- Mat. mod. kolayca anlaşılır.
- Gerekirse hemen düzeltilebilir.

Sürecin aşamaları;

1- Problemi belirleme ve tanımlama: Değişkenler ve sınırlamalar. Sınırlamalar olabilirliği ve kabul edilebilirliği tanımlayan limitlerdir, yani değişkenlerin alabileceği değerlerin sınırlarını gösterir. Değ. ile problemin faktörlerinin etkileşimlerini yansıtırlar.

2- Değişkenler ve sınırlamaların analizi

Problemi belirleme
|
sınırlamalar ve değişkenlerin analizi

1. sınırlama — 2. sın. — 1. değ. — 2. değ.

sınırlar → Değ. X, Değ. Y

bilinen eleman — X–Y ilişkisinin hipotezi

ilişkinin test edilmesi.

Yukarıdaki analiz süreci, ilk koşul sağlanıncaya kadar devam eder. İlk olarak, değişkenler arasındaki ilişkiler matematiksel bir biçimde tanımlanır. Duruma önceki aşamadaki modelin montajı yerleşmiştir. Daha sonraki aşamada da, bu aşamada tanımlanan ilişkiler isembolleri yardımıyla tanımlanabilir.

3- Değerler arası ilişkilerin tanımlanması: Her değişkenin ve ilişkilerin tanımlandığı süreçtir.

Kapanış Nakit Değeri = açılış nak. değ. + nakit değişimi (1)

Açılış Nak. Değ. = önceki dön. kapanış nakit değeri (2)

Nakit değişimi = dön. gelirleri − dön. harcamaları (3)

Buna göre;

Kapanış nak. değ. = önceki dön. kap. nakit değeri + dön. gel. − dön. har.

Burada, ayrıştırma sayesinde ilgili değişkenler ve ilişkileri tanımlandı. Ayrıştırma derecesi, modelin doğruluk derecesi ve temsil yeteneğini belirler. Ayr. der. arttıkça modelin karmaşıklığı da artacaktır. Bu sakıncayı gidermek için, önce basit bir modelin geliştirilmesi, test edilmesi ve doğrulanması, daha sonra da modelin değişkenlerini daha fazla ayrıştırarak, daha karmaşık bir model elde edilmesi gerekir.

4- Formülasyon: Bir önceki aşamada belirlenen değişkenler arası ilişkilerde, değişkenleri temsil eden kelime veya kelime grupları yerine semboller koymaktan ibarettir.

5- Model Geliştirme: Formülasyonun ana amacı, bu ilişkilerin yansıttığı mantığı model geliştirme aşamasında rahatça kullanabilmektir.

6- Modelin test edilmesi: Bir model iki şekilde test edilebilir: İlk olarak modelin her bölümünün ayrı olarak test edildiği "Analitik Yön"; diğeri de bölümlerin etkileşimi gözönünde tutularak, modelin toplam performansının test edildiği "Özet (Synoptic) Yön"dür.

7- Modelin Uygulamaya Konması: Model test edilip, uygunluğu kanıtlandıktan sonra, başlangıçta karar verici tarafından belirlenen sorulara cevap vermek için kullanılabilir, yani model uygulamaya konulur. Uygulamaya konması ile test edilen modelin organizasyon içinde kullanılacağı bölüm ile birleştirilmesi olur.

DOĞRUSAL PROGRAMLAMA

DP, belli bir amacı gerçekleştirmek için sınırlı kaynakların etkin kullanımı ve seçenekler arasında en uygun dağılımını sağlayan matematiksel bir tekniktir. Simplex Yön. DP problemlerinin çözümünde kullanılan en etkin yöntemdir. DP problemi aynı zamanda optimal bir kaynak dağılımı problemidir. Böyle bir problemde gerçekleşmesi beklenen amacın açık ve ölçülebilir bir biçimde bir doğrusal fonksiyon olarak ifadesi gerektiriler, diğer yandan bu amacın gerçekleşme derecesini kısıtlayan sınırlı kaynakların da aynı biçimde doğrusal eşitlik yada eşitsizlikler olarak ifade edilmesi gerekir.

Doğrusallık: DP'nin temel varsayımı, gerçekleşecek amacın doğrusal bir fonksiyon ve bu amacın gerçekleşme derecesini kısıtlayan kaynak sınırlılıklarının da doğrusal eşitlik yada eşitsizlikler biçiminde ifade edilmesidir. DP problemlerinde yer alan değişkenler arasında sabit bir oransal ilişkinin olduğunu belirtir. Yani bir değişkende bir değişme belli bir oranda başka bir değişkende değişmeye neden olur.

Sınırlılık: DP probleminde amaç, sınırlı kaynakların optimal dağılımını sağlamaktır. Dolayısıyla bu problemlerde kaynakların sınırlılık derecelerinin bilinmesi gerek.

Bölünebilirlik: DP'de kullanılan kaynakların temsil eden değişkenler kesirli değerler alabilirler. Böylece, kaynaklar değişik seçenekler arasında optimal bir biçimde dağıtılırken en küçük parçalara bölünebilirler. Eğer uygulamada bu bölünebilirlik işlenmiyorsa ya da değişkenlerin tamsayı değerler alması isteniyorsa bu durumda tam sayı prog. (integer programming) tekniği kullanılır.

DP Problemlerinin Formüle Edilmesi:

① Amaç Fonksiyonu

DP'de amaç, matematiksel bir biçimde ifade edilen ve ifade ettiği değeri en büyükleme veya enküçükleme gibi iki durumu gerçekleştirmeyi hedefleyen bir tek doğrusal fonksiyondur.

Ör: $z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots c_n x_n$

yada

$$z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

② Kısıtlılıklar

Amaç fonksiyonunun alabileceği değer sınırlarını kısıtlılıkları

a- Kaynak kısıtlılıkları: Amaç fonksiyonunun temel sınırlılıkları olup problemde ilgili mevcut kaynakları belirtir. Ne kadar kaynak sınırlaması varsa o kadar kısıtlılık olabilir ve aşağıdaki gibi gösterilir.

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \leq b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \leq b_2$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \leq b_m$$

Bunu genel olarak;

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leq b_i \quad (\text{tüm } i\text{'ler için}) \quad (i = 1, 2 \dots m)$$

b) Negatif olmama kısıtlılığı: Değişkenler negatif değerler almaz.

$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$

yada

$x_j \geq 0$

Çünkü mantıksal olarak, x_1 değişkeni buzdolabını temsil ediyorsa $x = -10$ olamaz.

* Genel olarak max. durumu için:

$$z_{max} = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i \quad (j = 1, 2, \dots n)(i = 1, 2 \dots n)$$

$$x_j \geq 0$$

Min. karı

$$Z_{min} = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i$$

$$x_j \geq 0$$

Z = Amaç fonksiyonu

x_j = Problemdeki karar değişkeni

a_{ij} = x_j değişkenlerinin girdi katsayıları

b_i = Sınırlı kaynak miktarlarını

c_j = x_j değişkenlerinin amaç fonksiyonundaki katkı katsayıları

m = Kısıtlılıkların sayısı

n = Değişken sayılarını gösterir:

Örnek: Bir mobilyacı tanesini 200 lira karla sattığı normal tip ve 300 lira lüks sandalye üretmekte. Normal tipe 3 saat doğrama işi ve 1 kg boya, lüks tipe 4 saat doğrama ve 1/2 kg boya gerekiyor.

Mobilyacının sandalye üretimi için doğrama makinası günlük en fazla 92 saat. Boya miktarı ise 20 kg'ı geçmemekte.

Karı max etmek için günlük kaç tane normal ve lüks sandalye üretmeli yani eldeki kaynakları mevcut seçenekler (normal ve lüks) nasıl dağıtmalı ki belirtilen kısıtlar altında karı max olsun:

Normal tip sandalye sayısı x_1, lüks s. sayısı x_2

Amaç Fonksiyonu: $Z_{max} = 200x_1 + 300x_1$

Kaynak kısıtlılıkları,

$3x_1 + 4x_2 \leq 92$ (Doğrama kısıtı)

$1x_1 + 1/2x_2 \leq 20$ (Boya kısıtı)

Negatif sandalye üretimi olamayacağına göre.

$x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$

DP problemlerinin çözümünde cebirsel, grafik ve simplex yöntemleri [?].

Doğrama $3x_1+4x_2 \le 92$, kısıtlamaktaki tüm doğrama işini kullanmak [?].

$3x_1+4x_2=92$

Eğer $x_1=0$ ise $x_2=23$

$x_2=0$ ise $x_1=30.6 \cong 31$

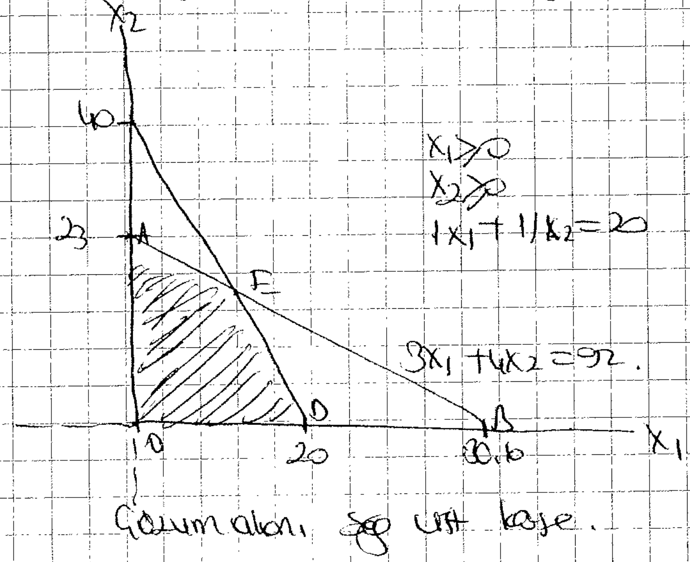
Aynı düşünce ile boya sınırlandırmaları

$1x_1+0.5x_2 \le 20$

$x_1=0 \Rightarrow x_2=40$

$x_2=0 \Rightarrow x_1=20$

Bu doğruları koordinatlarına göre grafik üzerine aktarırsak



Çözüm alanı sol üst köşe.

Her iki kısıtlılığa uyma koşulu ile ancak OAED alanı içinde üretme bulunulabilir. B noktasında boya kısıtı nedeni ile C noktalarında doğrama kısıtı nedeniyle üretimde bulunulmaz. Böylece sonra, her iki kısıtlılığı karşılayan OAED üretim alanı isterse kârı max eden noktayı bulmalı.

A, E, D noktalarından biri kârı max yapan nokta. O'dan uzaklaştıkça üretim miktarı artacak.

Deneme - Yanılma yöntemine göre optimal noktayı belirlemek için her noktadaki üretim miktarı hesaplanır ve amaca (kâra) olan katkıları saptanır. Hangi noktada amaç max. oluyorsa optimal üretim noktası o noktadır.

A, E, D noktalarındaki üretim miktarı:

A noktasında $X_1=0$, $X_2=23$

D " $X_1=20$ $X_2=0$

E " ; bu nokta $3X_1+4X_2=92$ $1X_1+1/2X_2=20$ doğrularının kesişimi olduğu için bu eşitlikleri aynı anda sağlayan X_1 ve X_2 değerleri aranılır.

$3X_1+4X_2=92$
$1X_1+1/2X_2=20$

X_1 katsayısını ikinci eşitlikte 0 yapmak için birinci eşitliği $-1/3$ ile çarpalım ve ikinci eşitliğe yeni bir eşitlik olarak yazalım (Gauss yok etme yöntemi)

$-1/3R_1+R_2$
$$\left[\begin{array}{l} 3X_1+4X_2=92 \\ 0X_1-5/6X_2=-32/2 \end{array}\right.$$

$X_2=12.8$

Bulunan değeri 1. eşitlikte yerine koyarsak,

$X_1=13.6$

3 noktadaki üretim miktarı bulunduktan sonra bu noktaların amaç fonksiyonuna katkıları:

A noktası için ; $Z=200(0)+300(23)=\underline{\underline{6900}}$ en büyük kâr

D " " ; $Z=200(20)+300(0)=4000$

E " " ; $Z=200(13.6)+300(12.8)=6560$

Yani, mobilyacı kârını max. yapmak için 23 lüks sandalye üretmeli ve hiç normal sandalye üretmemelidir.

TAM SAYILI PROGLAMA

DP problemlerinin en önemli varsayımlarından biri değişkenlerden kesirli değerler alabilecekleri şeklindeydi. Yani bütün değişkenler en küçük birimlerine kadar bölünebilir olarak kabul edilmekteydi. Ancak gerçek hayatta elde ettiğimiz bu değerlerin uygulamaya konulması olanaklı olmayabilir. Bu durumda DP yerine TSP modelleri kullanılmalıdır.

TSP yönde tüm yada bazı değişkenlerin tam sayı olması şeklinde bir kısıt vardır. Tam sayı olması istenen değişken sayısına göre 3 farklı tam sayı P. türü vardır. Bunlar; bütün değişkenlerin tam sayılı değerler almasının istendiği saf (tam) sayılı P. bazı değişkenlerin T.S. değ. alması istendiği karma TSP, ve sıfır-bir TSP. dir.

Mobilyacı örneği

Sandalye ve koltuk üretiyor. Bir sandalye üretmek için ve koltuk üretmek

	Tahta	Boya	Kâr
Sandalye	3m³	1kg	275 TL
Koltuk	4m³	1/2 kg	300 TL.
	92m³	20kg	

Mobilyacı kaç tane koltuk, kaç tane san. üretmeli kârı max. etmek istiyor. Kullanabileceği top. tahta mik. 92m³, boya mik. 20 kg.

Karar değişkenleri

x_1: üretilecek sandalye miktarı

x_2: " koltuk "

Amaç Fonksiyonu

$Z_{max} = 275x_1 + 300x_2$

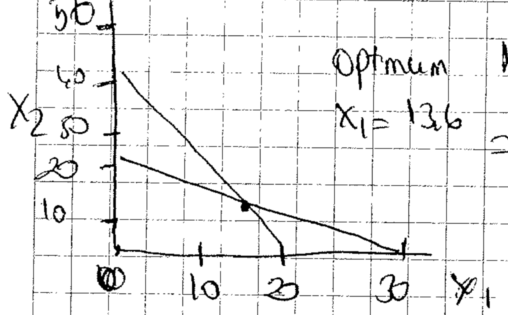
Kısıtları

1- Toplam tahta miktarı günlük 92 m³

$3x_1 + 4x_2 \leq 92$

2- Toplam boya mik. günlük 20kg.

$1x_1 + 1/2x_2 \leq 2$



Optimum nokta,
$X_1 = 13.6$ $X_2 = 12.8$
$Z = 7580$

Yuk. gör. gibi R^2 tetrajı ile çözüldüğünde kârı max. yapacak üretim bulun. 13,6 adet son ve 12,8 koltuk. Elde edilen sonuç max. kârı verecek bile gerçek hayatta uygulanabilirliği yoktur. Elde edilen değerler tam sayı olmadıkları için bazı işlemler yapmak gerek. En kolay yol değerleri en yakın tamsayıya yuvarlamak. Ancak çözüm değeri kısıtlara uygun olduğundan, daha yüksek bir sayıya yuvarlamak olanağı yoktur. Yani, yuvarlama işlemi ile bir sonuca ulaşmak istiyorsak bir alt sınırdaki sayıya yuvarlanması gerekir. Buna göre optimal sonuç 13 adet sandalye 12 adet koltuk.

$Z = 7175$

X_1	X_2	A.F. Değeri
12	13	7200
12	14	7500
13	12	7175
13	13	7470
13	14	7775
14	12	7450
14	13	7780

Görüldüğü gibi en basit yol olan 13,12 7175 lik bir kâr sağlıyor ve bu anlamda elimizdeki kaynakların etkin kullanılmasına olanak veriyor.

Şekilde görüldüğü gibi noktalardan bir kısmı opt. çözüm alanı içinde, bir kısmı değil. Yuvarlama sonucunda elde edilen üç kombinasyonu üç grup altında toplayabiliriz. (14,13) nokta gibi opt. çöz. alanı dışında, (13,12) gibi opt. olan içinde ancak opt. sonuç değil, yoksa sonra eğer yuvarlama sonucu elde edilen değer opt. sonucu verebilir.

Yuvarlama işlemi yapıldıktan sonra hangisi opt. ise onu kullan, bunları tespit etmek de ayrı bir uğraş olur.

Bu arada (12,14) noktası tam sayılı optimal çözümü verecek.

ULAŞTIRMA MODELİ

UM özel DP'nin özel bir durumudur. Genelde DP optimal bir üretim programı belirlemeyi amaçlamaktadır. UM de üretilen ürünün tüketim merkezlere ulaştırılmasının toplam maliyetini minimum yapan optimal ulaştırma (dağıtım) programı belirlemeyi amaçlar. Bu nedenle, UM bir ürünün çeşitli üretim merkezlerinden tüketim merkezlere dağıtımını sağlayan farklı ulaştırma programları arasında en düşük yani min. maliyetlisini belirlemeyi amaçlayan bir yöntemdir.

Atlama Taşı Yön, MODI (Modified Distribution)

UM'nin varsayımları

a) Ulaşımı söz konusu olan ürün bir tek ürün türüdür. Yani homojen bir üründür.

b) Toplam taşıma maliyeti taşınacak ürün miktarı ile doğrusal ilişkilidir. Yani toplam mal. ürün miktarına bağlı olarak birim taşıma mal. oranında artar.

c) Matematiksel çözüm olanakları arz noktalarından talep merkezlere negatif varmaz yapılmaz.

UP'lerinin çözümü 1941 yılında Hitchcock tar. yapıldı. DP olarak formülasyonu Dantzig tar. yapıldı. DP tekniği ile çözümlere ek olarak daha sonra bazı özel yöntemler geliştirildi. Atlama Taşı (Stepping Stone - 1953 Cooper ve Charnes). Ancak bu zaman alıcı daha kolay bir yön. olan MODI. Ancak daha sonra Vogel ve Russell VAM (Vogel's Approximation Method) ve RAM (Russell's AM) optimal çözüme daha çabuk yaklaşmayı sağlayan yaklaşık yöntemlerdir.

REGRESYON ANALİZİ

RA, bir olgudaki (bağımlı bir değişkendeki) değişimi etkileyen nedenleri belirtmeyi "açıklamayı" ve buna bağlı olarak geleceği tahmin etmeyi amaçlar. Yani, RA'nın iki temel amacı vardır;

1- Belirli varsayımlar çerçevesinde bir olguyu açıklamak ve
2- Bu açıklamaya bağlı olarak bu olguyu ileriki zamanlarda bulmak.

RA'nde bir başka değişkenin yoluyla değişkenin alacağı değerlere bağlı olarak açıklanmaya çalışılan değişkenlere "bağımlı değişken" (açıklanan değ.), bağımlı değişkendeki hareketleri açıklamak için kullanılan değişkene "bağımsız-açıklayıcı değ.". Tek bir açıklayıcı değ. kullanıldığı zaman "Basit R", birden fazla olduğunda "Çoklu R".

Bağımlı Değ. Y, Bağımsız Değ. X. Aralarındaki ilişkinin matematiksel formunun doğrusal olduğu varsayılır. Yani;

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \dots + \beta_k X_k + \varepsilon$$

→ Stokastik bölüm (bağımsız değ.ler ile açıklanamayan Y'nin davranışı)
→ Deterministik bölüm (Y'nin ortalama değerini tahmin eder)

$\beta_0, \beta_1 \dots \beta_k$ "regresyon parametreleri" olan sabitler ve ε hata terimidir.

Bu denklem "Genel Regresyon Modeli"dir. Doğrusal regresyon analizinin amacı $Y, X_1, X_2 \dots X_k$ değişkenleri hakkındaki gözlem değerlerini kullanarak $\beta_0, \beta_1 \dots \beta_k$'yı tahmin etmektir.

RA'nde gözlemlenemeyen hata teriminin dört farklı etkenin bileşimidir;

a) Dışlanan değişkenler:
b) Doğrusal olmama: X ile Y arasındaki doğrusal olmayan ilişkinin etkisini de ε içerir.
c) Ölçüm hataları
d) Tahmin edilemeyen etkiler: Özellikle insan davranışı ile bekleneyen etkiler.

* Regresyon modeli kurulurken dikkat alınması gereken varsayımlar;

1- Doğrusal ilişki: Söz konusu doğrusallık değişkenler arasında değil, parametreler arasındaki doğrusallıktır. Dolayısıyla reg. parametreleri olan $\beta_0, \beta_1 \dots \beta_k$ sadece

birinci kuvvetleyle alınabilir.

2) RA'nde seçilen bağımsız değişkenden hareketle bağımlı değişkenin hareketini tahmin etmek temel amaçtır. Dolayısıyla seçilen bir bağımsız değişkenin (x) değerlerinin en az birinin farklı olması bir başka deyişle bağımsız değişkende bir hareket olması gereklidir.

3) Hata teriminin (ε) bağımsız değişkenden istatistiki olarak bağımsız olduğu kabul edilir. Bunun anlamı bağımsız değişken ile her i gözlemi için elde edilen hata terimleri arasındaki kovaryans 0'dır.

4) Hata teriminin ortalaması (beklenen değeri) "sıfır" olan bir normal dağılıma sahip olduğu kabul edilir.

5) Hata terimleri istatistiki olarak birbirlerinden bağımsızdır. Yani hata terimleri arasındaki kovaryans "0" dır.

6) Rassal bir değişken olan hata teriminin sonlu bir varyansa sahip olduğu ve bu varyansın bütün bağımsız değişken verileri için aynı olduğu kabul edilir.

Basit Regresyon (Doğrusal)

Basit yani tek bir bağımsız değişken anlamına gelir. Doğrusallık ise regresyon parametrelerinin modelde birinci dereceden kullanılması gerekliliğini temsil eder. Basit Doğrusal R. modeline ilişkin bazı örnekler

$y = \beta_0 + \beta_1 x + \varepsilon$ ⇒ "Genel (Klasik) Basit Doğ. Reg. Modeli

$y = \beta_0 + \beta_1 x^2 + \varepsilon$

$y = \beta + \beta_1 \log(x) + \varepsilon$

En Küçük Kareler Yöntemi ile Reg. Parametrelerinin Tahmini

Bir tahminin sahip olması gereken ilk özellik sapmasızlık (anlamı tahmin edilen değerlerin gerçek değerleri yansıtması). Diğer özellik tutarlılık 3. etkinlik (sapmasız tahmin ediciler arasında varyansı küçük olanı etkindir)

EKK yönteminde amaç gerçek değerlerden sapmaların kareleri toplamını en küçük yapan regresyon parametrelerinin bulunmasıdır. Yani;

asa fonksiyonu min. etmektir,

$$SSE(a,b) = \sum e_t^2 = \sum (y_t - b_0 - b_1 x_t)^2$$

Bu fonksiyonun min değerini sağlayan b_0 ve b_1 katsayılarını bulmak için b_0 b_1'e göre eşitliğin kısmi türevleri alınması gerekir. Türevler alınır ve sıfıra eşitlenirse "normal denklemler" adı verilen eşitlikler elde edilir;

$$\frac{\partial}{\partial b_0} \sum e_t^2 = \sum (y_t - b_0 - b_1 x_t) = 0 \quad (b_0 \text{ için})$$

$$\frac{\partial}{\partial b_0} \sum x_t^2 = \sum (y_t - b_0 - b_1 x_t)^2 = 0 \quad (b_1 \text{ için})$$

Buradan;

$$2\sum (y_t - b_0 - b_1 x_t) = 0$$
$$2\sum (y_t - b_0 x_t - b_1 x_t^2) = 0$$

her iki fonksiyon 2'ye bölünür ve terimler düzenlenirse;

$$\sum y_t = n b_0 + b_1 \sum x_t$$
$$\sum x_t y_t = b_0 \sum x_t + b_1 \sum x_t^2$$

1. eşitlikte b_0 katsayısının yerine b_1 yazılırsa;

$$b_0 = \frac{\sum y_t - b \sum x_t}{n}$$

Bu değer 2. eşitlikte yerine konulursa

$$b = \frac{n \sum x_t y_t - \sum y_t \sum x_t}{n \sum x_t^2 - (\sum x_t)^2}$$

Ör: A belediyesi, kişi sayısı ile belediyenin harcamaları arasında ilişki kurmak istiyor. Belediyenin harcamalarındaki artış bağımlı değişken (y), şehirde ikamet eden yerleşik sayısındaki artış oranı (x)

	1990							1997
X	15	18	23	35	48	53	60	64
Y	8	12	14	16	22	28	35	41

Veriler bakıldığında iki değişken birbirleriyle doğru orantılı olarak artıyor. Buna göre $\hat{y} = b_0 + b_1 x$ kullanılması doğrudur.

2. adım b_0 ve b_1 parametrelerin tespit edilmesi

$$b_0 = \frac{\sum y_t - b\sum x_t}{n} \qquad b = \frac{n\sum x_t y_t - \sum y_t \sum x_t}{n\sum x_t^2 - (\sum x_t)^2}$$

Parametreleri tahmin edebilmek için her iki değişkende de ortalamadan olan sapmaları hesaplamalı gerek.

$y_i - \bar{y}$ $\quad x_i - \bar{x} \quad (x_i - \bar{y})(x_i - \bar{x}) \quad (x_i - \bar{x})^2$

$$b_1 = \frac{\sum(y_i - \bar{y})(x_i - \bar{x})}{\sum(x_i - x)^2} = \frac{1526}{962} = 1.58676$$

$\bar{y} = b_0 + b_1\bar{x}$

$b_0 = \bar{y} - b_1\bar{x} = 40 - (1.59) \cdot 22$

$b_0 = 5.101871$

Buna göre model:

$Y = 5.10187 + 1.58627X$

Kurulan regresyon modeli iki şekilde test edilir. İlk olarak tahmin edilen her parametre test edilir, ikinci olarak ve model bütüncül olarak test edilir.

SSE = Hata Karelerinin Toplamı $= \sum e_t^2 = \sum(y_t - \hat{y}_t)^2$ (beklenen ile fiili değer arasındaki fark)

SST = Toplam Kareler Toplamı $= \sum(y_t - \bar{y})^2$

SST'nin iki bileşeni vardır. Birincisi reg. modeli ile açıklanabilen kısmı (bağımlı değişkenin tahmini değeri ile ortalama değeri arasındaki fark) yani SSR = Regresyon modeli ile açıklanan değişimin kareleri toplamı.

$SSR = \sum(y_t - \hat{y})^2$

$SSE = \sum(\hat{y}_t - \bar{y})^2$

$SST = SSE + SSR$ Eşitliğin her iki tarafı SST'ye bölünürse,

$$1 = \frac{SSR}{SST} + \frac{SSE}{SST}$$

1 toplam ~~terim~~ yüzde değişimi temsil ederken, sağ tarafın birinci terimi reg. ile açıklanan, 2. terimi reg. ile açıklanamayan bölümü temsil eder.

Birinci terim regresyonun toplam değişimi açıklama oranını ifade eder. Yani "belirleme yada determinasyon katsayısına" eşittir. Bu oran ne kadar yüksek ise modelin açıklama gücü o kadar fazladır. 0 ile 1 arasında değişir.

$$R^2 = \frac{SSR}{SST} \quad \text{ya da} \quad R^2 = 1 - \frac{SSE}{SST}$$

R^2 ölçü biriminden bağımsızdır. Çünkü pay ve payda aynı birime sahiptir.

Hesaplanan R^2'nin otokorelasyon nedeniyle zaman serisi modellerinde %90 civarında çıkması beklenir. %60-70 düşük kabul edilir. Ancak çapraz kesit verilerinde %60-70 iyi bir rakamdır. Ancak R^2'ye bakmak yeterli değil sadece. Modelin uygunluğu konusunda bakılacak başka ölçütler de var. Daha önemlisi, bir modeli regresyon parametrelerinin işaretlerinin ekonomik teori, öncüllüğü derecesinde ve de sezgiler ile uyumlu olup olmadığına bakarak değerlendirmektir.

Modelin bütüncül olarak test edilmesinde t-testinden başka F testi de kullanılır.

Hataların Kareleri Ortalaması $= MSE = \frac{SSE}{n-2}$

Regresyon " " $= MSR = \frac{SSR}{1}$

$$F_c = \frac{MSR}{MSE} = \frac{SSR/1}{SSE/(n-2)} = \frac{\sum(\hat{y}_t - \bar{y})^2/1}{\sum(y_t - \hat{y}_t)^2/(n-2)}$$

<u>Güven Aralıklarının Belirlenmesi:</u>

b_0 ve b_1 birer tahmindir. ve bu tahminlerin elde edilmesi esnasında belli oranda belirsizlik var. Bu belirsizliğin dikkate alınması, bu değerlerin belirli bir sayıya eşit olduklarını söylemenin yanında, verilen bir olasılık dahilinde belirli bir aralıkta yer aldıklarını da söylemektir. Söz konusu aralık $1-\alpha$ olacağı için;

$$P\left(-t_{\alpha, n-2} \leq \frac{b_1 - \beta_1}{S_{b_1}} \leq t_{\alpha, n-2}\right) = 1-\alpha$$

* Düzeltilmiş R^2. (R^2_a = Adjusted R^2)

R^2 deki artışın matematiksel ilişkiden mi yoksa x'in gerçekten iyi bir açıklayıcı değişken olmasından mı kaynaklandığı araştırılmalı. Bunun için R^2_a kullanılır. $R^2_a = R^2 = 1 - \frac{SSE}{SST}$ denkleminin serbestlik derecesine göre düzeltmesi ile elde edilir.

$$\bar{R}^2 = 1 - \frac{n-1}{n-(k+1)} * \frac{SSE}{SST} \quad \text{veya} \quad \bar{R}^2 = 1 - \frac{MSE}{S_y^2}$$

$R^2 = \%95$ $\bar{R}^2 = \%93$ ile örneğin çok farklı değil. yani fazla değişken kullanmanın açıklama gücünde bir şişkinlik neye getirmediği tespit edilmiştir.

CAPM

CAPM yatırımı yapmayı planladığınız kendi değerine sahip olduğu riske uygun bir getiri elde edeceğini açıklamakla, hatta henüz piyasada işlem yapmaya başlamamış bir varlığın vermesi gereken getiriyi açıklamaya, açıklamaya çalışır.

CAPM, bir finansal varlığın beklenen getirisinin risksiz faiz oranı ile riskin çeşitlendirilemeyeceği durumdaki risk priminin toplamına eşit olduğunu varsayar.

Varlıkların nasıl fiyatlandırıldığını görmek için bir model oluştururuz. Bunun için basitleştirmeler adına, bütün karmaşıklıklardan soyutlanarak sadece önemli noktalara odaklanılır. Bunun için de bazı varsayımlarda bulunmak gerekir:

1- Yatırımcılar portföylerini bir dönemlik getiri ve riske bakarak değerlendirir.

2- Yatırımcılar riskten kaçınır. Getirisi maksimize etmeye çalışır. Riski ~~aynı~~ hariç herşeyi aynı olanlardan riski düşük olanı seçer.

3- Varlıklar sonsuz bölünebilir ve paraya çevrilebilir. Yani yatırımcı isterse bir varlığın küçük bir yüzdesini bile satın alabilir.

4- Yatırımcının hem ödünç ~~alacağı~~ verebileceği ile hem de borç alabileceği bir risksiz oran vardır.

5- Vergi ve işlem maliyetleri yoktur. Yatırımcılar hiçbiri [illegible] ve bunun neticesi yok.

6- Yatırımcıların beklentileri homojendir. Yani finansal varlıktan beklenen getirinin riskini anlama yetenekleri aynıdır.

Bu varsayımlar bize bir kişi nasıl yatırım yapar sonra herkes aynı şekilde yatırım yaparsa varlık fiyatları ne olur sonra [illegible] gösterir.

CAPM'in unsurları; rf, pazar portföyü getirisi, β.

Tüm varlıkları içinde yer aldığı portföy piyasa portföyüdür.

⇒ Pazar portföyünün getirisi:

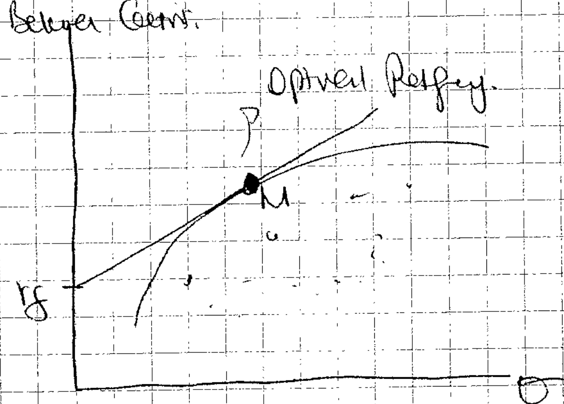
$$E(R_P) = a\,E(R_i) + (1-a)\,E(R_m)$$

a = riskli varlığın portföy içindeki ağırlığı

1-a = diğer varlıkların portföy içindeki ağırl.

⇒ CML

Beklenen Getiri



Bu doğrunun matematiksel ifadesi:

$$r_p = r_f + \left[\frac{r_M - r_f}{\sigma_{m-0}}\right) \sigma_p$$

$$r_p = r_f + \left[\frac{r_M - r_f}{\sigma_M}\right] \sigma_p$$

CML bize bir yatırımcının hiç risk almadığı takdirde risksiz orandan getiri elde edebileceğini, daha fazla getiri elde etmek istiyorsa, belirli bir riske katlanıp, dolayısıyla alacağı ilave riskin bir ödülü olduğunu anlatmak. $(r_M - r_f)/\sigma_p$

⇒ Beta katsayısı

CAPM : $E(R_i) = r_f + \left[E(R_M) - r_f\right]\beta_i$

CAPM tek değişkenli bir model. Bağımsız değişken olarak piyasa portföyü kabul edilerek ve tüm riskli finansal varlıkların ~~[illegible]~~ getirisi pazar portföyünün getirisi ile açıklanmaktadır. Beta, bir menkul kıymetin getirisinin piyasa portföyünün getirisi ile birlikte hareket etme derecesini gösterir.

bilindiği gibi bir menkul kıymetin getirisi toplam riske bağlıdır. Bu da standart sapma ile gösterilir. Piyasa portföyü çok iyi şekilde çeşitlenmiş bir portföy olduğundan sistematik olmayan risk ortadan kalkacaktır ve yalnız piyasa riski kalacaktır.

$\beta_i = \dfrac{\text{hisse senedi getirisi ile piyasa portföyü arasındaki kovaryans}}{\text{Piy. por. varyansı}}$

$\beta = 1$ ise $\Rightarrow$ PP ile aynı hareket.

$\beta = 0.5 \rightarrow$ PP yarısı kadar hareket.

$\beta = 2 \rightarrow$ iki katı daha fazla hareket.

⇒ SML:

CML etkin portföyler için beklenen getiri ile std. sapma arasındaki denge ilişkisini gösterir. Bireysel varlıklar bu doğrunun altında kalır, çünkü etkin değillerdir. Dolayısıyla bireysel menkul kıymetleri için Sharpe tarafından geliştirilen SML modelinde menkul kıymetin beklenen (olması gereken) getirisi ile betaları arasındaki ilişkiler incelenmiş ve böylece her bir menkul kıymetin beta katsayısından değerlendirmeye imkan verilmiş olur.

Tamamen iyi şekilde çeşitlendirilmiş portföylerde

Korelasyon katsayısı $i_{,M} \times \sigma_p = \sigma_p$

1 olduğundan toplam risk sistematik riske eşit.

$$r_M = r_f + \left(\frac{r_M - r_f}{\sigma_m}\right)\sigma_p$$

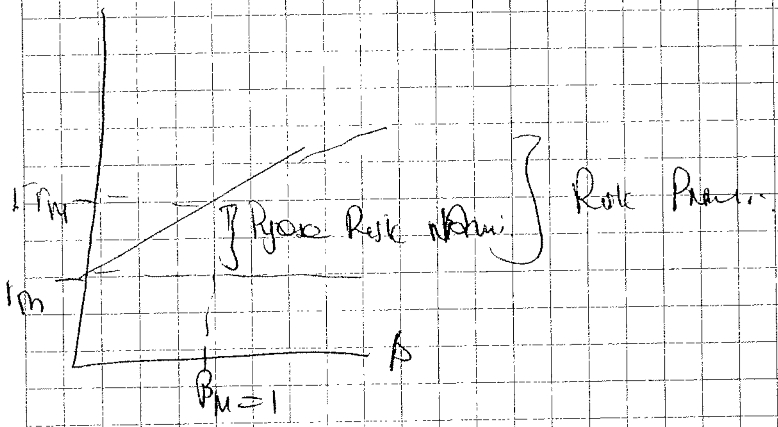
$$r_m = r_f + \left(\frac{r_M - r_f}{\sigma_m}\right) r_{i,M}\,\sigma_i$$

Bir menkul kıymetin beklenen getirisinin r_f ile katlanılan sistematik riske bağlı bir primin toplamına eşit olduğunu gösterir.

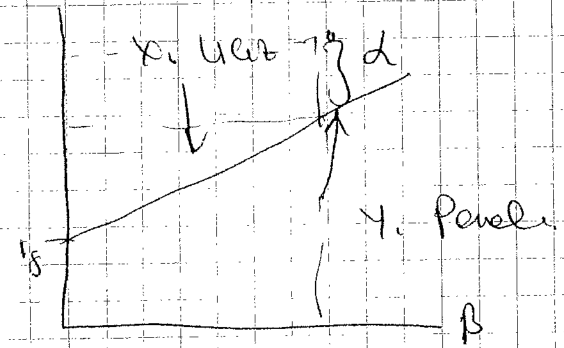
$$r_{i,M} = \frac{Cov_{iM}}{\sigma_i \sigma_M}$$

$$r_i = r_f + (r_M - r_f) \underbrace{\frac{Cov_{iM}}{\sigma^2_M}}_{\beta}$$

$$r_i = r_f + (r_M - r_f)\beta_i$$



SML, hisse senetlerinin ucuz veya pahalı değerlendiği olduğu yönünde bilgi sağlar. CAPM dengede olan bir piyasada gerçekleşen getiri ile olması gereken getirinin aynı olması gerektiğini söyler. Dolayısıyla bunlar doğru üzerinde yer alırlar.



X'te ucuz olduğu için talep artacak, fiyatları yükselecek, buna bağlı olarak gereken getirisi düşecek ve doğru üzerinde çıkar

⇒ Pazar Modeli

CAPM'de, bir hisse senedinin Pazar Endeksi ile olan ilişkisi tek faktörlü bir model olan, Pazar Modeli ile gösterilir. Bu model ile bir hs. senedinin belirli getirileri ile Pazar endeksinin belirli getirileri arasında doğrusal bir ilişki bulunmaktadır.

Eğer $r_p > r_p^e$ ise portföy performansı yüksek demektir.

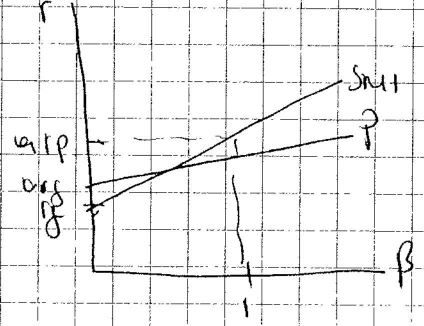
İlk önce piyasa getirisi ve r_f belirlenir, portföy betası hesaplanır..

Portföy α'sı hesaplanır. $(\alpha = r_p - [r_f + (r_M - r_f)\beta]$

b) Oynaklığa Ödül Oranı (Treynor Oranı)
(reward to volatility)

Jensen'e benzer, ikisinde de risk ölçütü sistematik risktir.

$RVOL = r_M - r_f / \beta$



Treynor'a göre performans ölçütü bu doğrunun eğimi SML'nin eğimi ile karşılaştırılarak belirlenir. Doğrunun eğimi, ödülün volatiliteye yani oynaklığa oranı.

$RVOp = (\bar{r}_p - \bar{r}_f) / \beta$

SML'nin eğimi ise $(\bar{r}_p - \bar{r}_M) / (1-0) = \bar{r}_p - \bar{r}_M$.

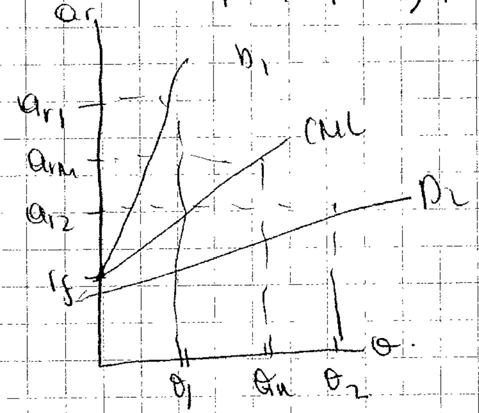
Hesaplanan oran piyasa oranından daha büyük ise (SML'den daha dik ise) portföyün piyasaya göre daha yüksek performans gösterdiği.

c) Değişkenliğe Ödül Oranı (Slope oranı)

Bu risk ölçütü olarak toplam riski gösterge olarak CML için kullanılır.

(Fark) . Diğerleri gibi CAPM'e dayanır.

$RVAR_p = (a_{rp} - a_{rf}) / \sigma_p$



CML'inin üzerinde yer alıyorsa (D_1 gibi) portföy piyasaya göre üstün performans elde eder.

Bu modeller eleştirilir çünkü etkin piyasa hipotezini kabul etmektedir.